

2021 年新高考第二次适应性考试

数学学科试题

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题的四个选项中，只有一项是符合

题目要求.

1.已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{1-x}\}$, $B = \{y | y = 2^{1-x}, x > 0\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{x | x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ D. $\{x | x < 1\}$

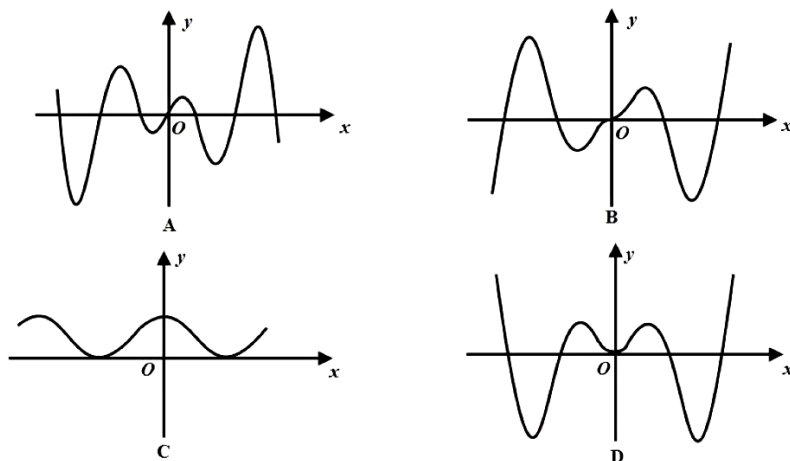
2.已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z(2+i) = 3+4i$, 记 $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $|\bar{z}| = (\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{29}}{3}$ B. $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{29}}{5}$ D. $\sqrt{5}$

3.我国古代数学名著《九章算术》中有如下问题：“今有厚八尺，两鼠对穿，大鼠日一尺，小鼠日半尺，大鼠日倍增，小鼠日自半，问几何日相逢？”意思是“今有土墙厚 8 尺，两鼠从墙两侧同时打洞，大鼠第一天打洞一尺，小鼠第一天打洞半尺，大鼠之后每天打洞比前一天多一倍，小鼠之后每天打洞长度是前一天的一半，问两鼠几天打通相遇？”两鼠相逢需要的天数最小为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

4.已知函数 $f(x) = x \sin x$, 则 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的部分图象大致为 () ,



5.三位同学获得学校数学竞赛的前三名，向老师询问结果，老师跟他们透露了3条信息：①甲不是第三名；②乙是第三名；③丙不是第一名，并告知他们以上3条信息中有且只有一条信息正确，那么该竞赛的第一名，第二名，第三名依次为（ ）

- A.甲、乙、丙 B.丙、甲、乙 C.甲丙、乙 D.乙、丙、甲

6.已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ， $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ，若 $\sin(2\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\sin \beta$ ，则 $\alpha + \beta =$ （ ）

- A. $\frac{5}{4}\pi$ B. $\frac{2}{3}\pi$ C. $\frac{7}{6}\pi$ D. $\frac{7}{4}\pi$

7.在平面直角坐标系 xOy 中，点 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左，右焦点，过点 F_1 且与直线 $l: y = -\frac{b}{a}x$ 垂直的直线交 C 的右支于点 M ，设直线 l 上一点 N （ N 在第二象限）满足 $F_1N \perp F_2N$ ，且 $(\overrightarrow{F_1N} + \overrightarrow{F_2M}) \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ ，则双曲线 C 的离心率的值为（ ）

- A. $\sqrt{5}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. 2

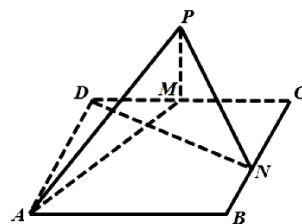
8.如图，在边长为2的正方形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 分别是边 CD ， BC 的中点，将 $\triangle ADM$ 沿 AM 翻折到 $\triangle PAM$ ，在 $\triangle ADM$ 翻折到 $\triangle PAM$ 的过程中， $\tan \angle PND$ 的最大值为（ ）

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

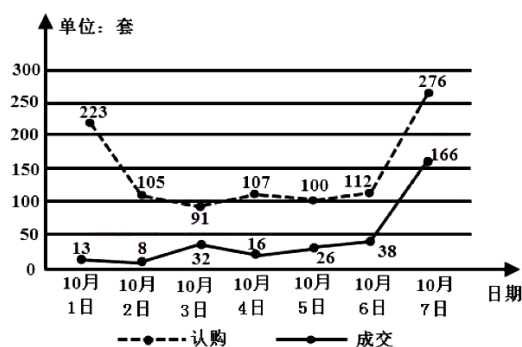
C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{2}{3}$



二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分共 20 分，在每小题的四个选项中，有多项符合项目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 2020 年突如其来的新冠肺炎疫情对房地产市场造成明显的冲击,如图为某市 2020 年国庆节 7 天假期的楼房认购量与成交量的折线图,某同学根据折线图对这 7 天的认购量(单位:套)与成交量(单位:套)作出如下判断,则下列判断正确的是()



- A. 日成交量的中位数是 16
- B. 日成交量超过平均成交量的只有 1 天
- C. 10 月 7 日认购量的增长率大于 10 月 7 日成交量的增长率
- D. 日认购量的方差大于日成交量的方差

10. 已知 $a = \log_3 e$, $b = \log_2 3$, $c = \ln 3$, 则()

- A. $a < b < c$
- B. $a < c < b$
- C. $a + c > b$
- D. $a + c < b$

11. 如图, 已知函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象与 x 轴交于点 A, B , 与 y

轴交于点 C , 若 $|OB| = 7|OA|$, $0 < |AB| < \frac{5}{2}$, 且 $\tan \angle ACB = \frac{9}{8}$, 则下列说法正确的是()

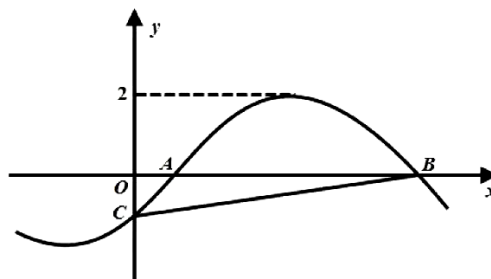
A. $f(x)$ 的最小正周期为 4

B. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后的图象

关于原点对称

C. $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的值域为 $[-2, \sqrt{3})$

D. $f(x)$ 在区间 $(6, 7)$ 上单调递增



12. 在四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, $\angle ADB = 60^\circ$, 二面角 $D-AB-C$ 的大小为 60° , 则下列说法正确的是 ()

A. $AB \perp CD$ B. 四面体 $ABCD$ 的体积 V 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 棱 CD 的长的最小值为 $\sqrt{3}$ D. 四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $\frac{52}{9}\pi$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 请把答案直接填写在答题卡相应位置上.

13. 已知 $(x-2)(x+m)^3 = a_6x^6 + a_5x^5 + \cdots + a_1x + a_0$, m 为常数, 若 $a_0 = 2$, 则 $a_4 =$ _____.

14. 某公司根据上年度业绩筛选出业绩出色的 A, B, C, D 四人, 欲从此 4 人中选择 1 人晋升该公司某部门经理一职, 现进入最后一个环节: A, B, C, D 四人每人有 1 票, 必须投给除自己以外的一个人, 并且每个人投给其他任何一人的概率相同, 则最终仅 A 一人获得最高得票的概率为_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 已知 $a = 2$, $b^2 + c^2 - bc = 4$. 若以 AB, AC 为边向 $\triangle ABC$ 外分别作正 $\triangle MAB$, 正 $\triangle MAC$, 记 $\triangle MAB$, $\triangle NAC$ 的中心分别为 P, Q , 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 的最大值为_____.

16. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = x - \frac{a}{x} - 1$ 在定域上有两个零点 m, n , 函数 $g(x) = \frac{a \ln x}{x} - x + 1$ 有

两个零点 p, q , e 为自然对数的底数 , 若 $m < p < n < q$, 则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，请在答题卡指定区域内作答.解答时应写出文字说明、

证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在① $\frac{2a-b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$; ② $4S = \sqrt{3}(a^2 + b^2 - c^2)$; ③ $c \sin A = a \cos\left(C - \frac{\pi}{6}\right)$ 这三个条件中

任选一个 , 补充在下面的问题中 , 并解答

在 $\triangle ABC$ 中 , a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边 , 已知_____ , $a - b = 6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积

$S = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_2 = 3a_1 = 3$, 且当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时 ,

$$S_{n+1} + 2a_{n-1} + 3S_{n-1} = 4S_n .$$

(1) 证明数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列 ;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n + 1}{a_{n+1}a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的就 n 项和为 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

如图 ,在多面体 $ABCDEF$ 中 ,底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形 , $\angle BAD = 60^\circ$,四边形 $BDEF$ 是矩形 , $BF = 3$,平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$, G 和 H 分别是 CE 和 CF 的中点.

(1) 求证 : 平面 $BDGH \parallel$ 平面 AEF ;

(2) 求二面角 $H - BD - C$ 的大小.

20. (本小题满分 12 分)

2020 年新冠肺炎疫情爆发以来 , 国家迅速采取最全面 , 最严格 , 最彻底的防控举措 , 坚决遏制疫情蔓延势头 , 努力把疫情影响降到最低 , 为全世界抗击新冠肺炎疫情作出了贡献.为普及防治新冠肺炎的相关知识 , 某社区开展了线上新冠肺炎防控知识竞赛 , 现从大批参与者中随机抽取了 200 名幸运者的成绩进行分析 , 他们的得分 (满分 100 分) 数据统计结果如下表 :

得分	人数	频率
$[30,40]$	5	0.025
$(40,50]$	30	0.150
$(50,60]$	40	0.200
$(60,70]$	50	0.250
$(70,80]$	45	0.225
$(80,90]$	20	0.100
$(90,100]$	10	0.050
合计	200	1

(1) 若此次知识竞赛得分 X 整体服从正态分布 , 用样本来估计总体 , 设 μ, σ 分别为抽取的

200 名幸运者得分的平均值和标准差 (同一组数据用该区间中点值代替), 求 μ, σ 的值 (四舍五入取整数), 及 $P(37 < X < 79)$ 的值 ;

(2) 在 (1) 的条件下 , 为感谢大家积极参与这次活动 , 对随机抽取的 200 名幸运者制定如下奖励方案 : 得分低于 μ 的获得 1 次抽奖机会 , 得分不低于 μ 的获得 2 次抽奖机会 . 假定每次抽奖 , 抽到 18 元红包的概率为 $\frac{2}{3}$, 抽到 36 元红包的概率为 $\frac{1}{3}$. 已知张三是这次活动中的幸运者 , 记 Y 为张三在抽奖中获得红包的总金额 , 求 Y 的分布列和数学期望 , 并估算举办此次活动所需要的抽奖红包的总金额 .

参考数据 :

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827 ; P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545 ;$$

$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973 .$$

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且经过点 $A(0, -1)$, 过点 A 且斜率为 k 的直线 l_1 与抛物线 $C_2: x^2 = 2py (p > 0)$ 的交于点 B, C , 且 C 为 AB 中点 .

(1) 求椭圆 C_1 的标准方程及点 C 的纵坐标 ;

(2) 若过点 C 且斜率为 $-k$ 的直线 l_2 与椭圆 C_1 交于 M, N 两点 , 求四边形 $AMBN$ 的面积的最大值及此时抛物线 C_2 的方程 .

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - kx - 1, x \geq 0$

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 ;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) + \frac{e^x}{x+1} \geq 0$ 对任意 $x \geq 0$ 恒成立 , 求实数 k 的取值范围.